Enseñanza-aprendizaje de la geometría en el marco de resolución de problemas con el uso de GeoGebra como mediador

López Hernández, José Luis
jose.lopez@enp.unam.mx

Escuela Nacional Preparatoria No. 6 “Antonio Caso”
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de conceptos de Geometría que fue aplicada con estudiantes de bachillerato de la ENP durante el curso de la asignatura de Matemáticas V. Las actividades diseñadas e implementadas primero con el uso de lápiz-y-papel y después con el uso de la herramienta tecnológica GeoGebra como mediadora en la resolución de problemas de tipo geométrico son de tipo colaborativo, de reflexión y análisis de los procedimientos con el fin lograr aprendizajes significativos en los estudiantes.

Se toma como marco de referencia el estudio de Radford (2012, p. 284) sobre el rol y la mediación del artefacto, cuyo potencial cognitivo radica (entre otras cosas) en cómo modifica los roles del profesor y de los estudiantes. Al utilizar el artefacto como mediador, el usuario piensa con el artefacto y a través del artefacto. Conforme el artefacto es utilizado con intencionalidad, el sujeto modifica el artefacto y éste modifica el pensamiento del usuario. El artefacto se convierte en parte de la forma en que llegamos a pensar y saber.

Los resultados muestran que la propuesta implementada ofrece mejoras significativas en el aprendizaje de los conceptos mencionados.

Palabras clave

Geometría, polígonos, resolución de problemas, GeoGebra, análisis colaborativo.

Línea temática

Mi experiencia sobre nuevas formas de enseñar a los estudiantes con tecnologías digitales.

Introducción

La enseñanza de la geometría es fundamental en el proceso de formación de los estudiantes de nivel medio superior. En la ENP se estudia en la primera unidad de la asignatura de Matemáticas V. Por lo general, varios de los conceptos y temas de geometría se enseñan de manera tradicional y el estudiante trata de memorizarlos sin llevar a cabo reflexión alguna. Es por ello que se han diseñado e implementado actividades para ser resueltas por parte de los estudiantes primero en ambiente de lápiz-y-papel y después en ambiente tecnológico GeoGebra, con el interés de observar cómo llevan a cabo la discusión y reflexión en la resolución de las actividades en ambos ambientes de trabajo. La actividad que aquí se reporta se relaciona con la resolución de problemas de tipo geométrico que involucran polígonos de igual área. Los resultados obtenidos del acopio de los datos muestran que estas actividades promueven en los estudiantes procesos de reflexión y significado de conceptos en geometría.

Desarrollo

En el estudio de la geometría, los Software de Geometría Dinámica (SGD) brindan al usuario la oportunidad de interaccionar con las construcciones geométricas, con lo cual, es posible descubrir propiedades y formular conjeturas (González & Herbst, 2009). Por tal motivo, se han diseñado e implementado actividades tanto con el uso de lápiz-y-papel como con el uso de GeoGebra, como mediador, para fortalecer el estudio de conceptos de geometría.

En esta propuesta participaron seis estudiantes de nivel medio superior de un grupo de la ENP, que cursaban en ese momento la asignatura Matemáticas V. Como parte de la metodología se diseñaron e implementaron actividades para ser resueltas primero en ambiente de lápiz-y-papel y después en ambiente tecnológico (GeoGebra). Los estudiantes en equipos de dos integrantes resolvieron las actividades en ambos ambientes de trabajo. Cada equipo contó con una computadora que tenía instalado el software GeoGebra. La recopilación de los datos se llevó a cabo mediante sus respuestas escritas en el papel y los archivos generados con GeoGebra con el propósito de aportar una visión y un contraste de su trabajo colaborativo desarrollado en ambos ambientes de trabajo.

Diseño e implementación de las actividades

A continuación, se muestra parte de una de las actividades implementadas, la Actividad A, primero resuelta con el uso de lápiz-y-papel (aquí llamada Actividad A1) y después resuelta con el uso de GeoGebra (aquí llamada Actividad A2) por parte de los participantes de uno de los equipos (Equipo 1).

Actividad A1. (ambiente lápiz-y-papel)

En la Figura 1 que se muestra a continuación, las rectas l_1, l_3 y l_5 son, respectivamente, paralelas a las rectas l_2, l_4 y l_6, y H es punto medio de $\overline{EG}$.

(a) Prueba que las áreas de:

(i) ⬟*ABCDE* [1] con la del ◊*CDEF* [2],

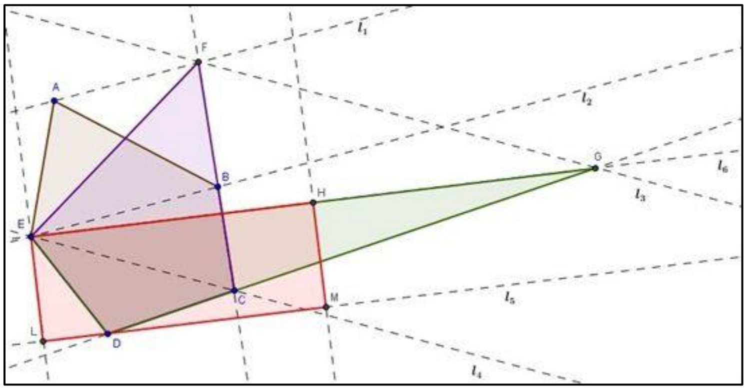
(ii) ◊*CDEF* con la del △*DEG* [3], y

---

[1] ⬟*ABCDE* se refiere a cualquier pentágono cuyos vértices son los puntos A, B, C, D y E.
[2] ◊*CDEF* se refiere a cualquier cuadrilátero cuyos vértices son los puntos C, D, E.y F.
[3] △*DEG* se refiere a cualquier triángulo cuyos vértices son los puntos D, E y G.

(iii) △*DEG* con la del ▭*EHML* [4] son iguales.

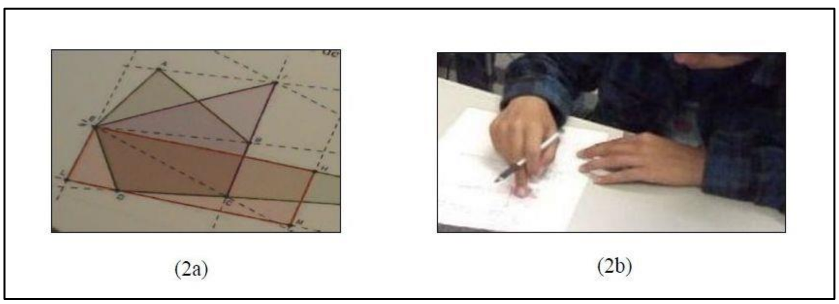
Figura 1. Polígonos de la misma área y de perímetro distinto.



(a) (i) Igualdad de las áreas de ⬟*ABCDE* y de ◊*CDEF*

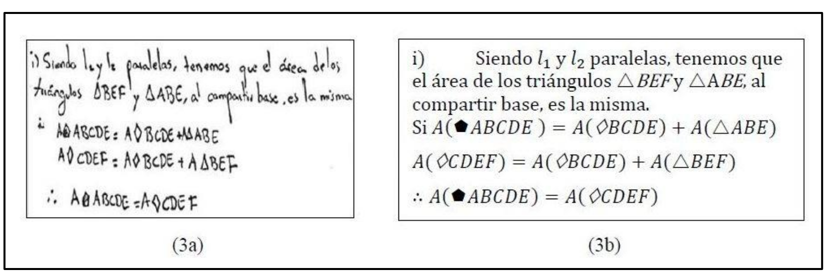
L1. Paco: Ah, estos [⬟*ABCDE y ◊CDEF; Figura 2a*] tienen áreas en común [*señala con su dedo ◊BCDE; Figura 2b*] y estos [*señala con su dedo △ABE y △FBE*] tienen la misma altura. Y como su base es común…

Figura 2. En (2b), Paco explica a Carlos por qué las áreas de ⬟*ABCDE* y de ◊*CDEF* que se muestran en (2a) son iguales.



L2. Carlos*:* Sí, entonces tienen la misma área. [*En seguida comienzan a escribir la prueba que se muestra en la Figura 3a*].

Figura 3. Prueba escrita para la sección (a) (i) de Actividad A1 de que las áreas de ⬟ABCDE y ◊CDEF son iguales.



i) Siendo l_1 y l_2 paralelas, tenemos que el área de los triángulos ΔBEF y ΔABE, al compartir base, es la misma

∴ A⬟ABCDE = A◊BCDE + AΔABE

A◊CDEF = A◊BCDE + AΔBEF

∴ A⬟ABCDE = A◊CDEF

(3a)

i) Siendo l_1 y l_2 paralelas, tenemos que el área de los triángulos $\triangle BEF$ y $\triangle ABE$, al compartir base, es la misma.

Si $A(⬟ABCDE) = A(\lozenge BCDE) + A(\triangle ABE)$

$A(\lozenge CDEF) = A(\lozenge BCDE) + A(\triangle BEF)$

$\therefore A(⬟ABCDE) = A(\lozenge CDEF)$

(3b)

[4] ▭*EHML* se refiere a cualquier rectángulo cuyos vértices son los puntos E, H, M y L.

(a) (ii) Igualdad de las áreas de *◊CDEF* y de *△DEG*

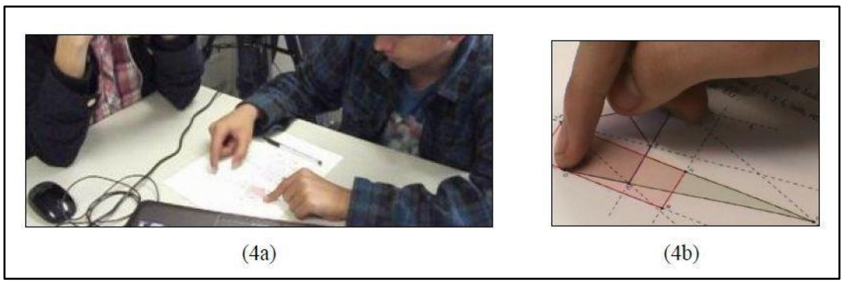
L3. Paco: Esta área [*señala con su dedo △CDE*] es común a ambas [*señala con su dedo ◊CDEF y △DEG*] y estas dos [*señala con su dedo las rectas* l_3 *y* l_4] son paralelas. [*Véase la Figura 4a*]

L4. Paco y Carlos: Entonces estos dos triángulos son iguales [*Paco señala con su dedo △CEF y △CEG*].

L5. Carlos: Sí, este punto [*se refiere al punto de intersección del lado* $\overline{CF}$ *de ◊CDEF con el lado* $\overline{EG}$ *de △DEG*]… Si *P* es el punto de intersección del lado $\overline{CF}$ de *◊CDEF* con el lado $\overline{EG}$ de *△DEG*, entonces, la región común a ambos polígonos es *◊CDEP* [*se refiere a* la región común entre *◊CDEF* y *△DEG*]. Y al recortar lo común…

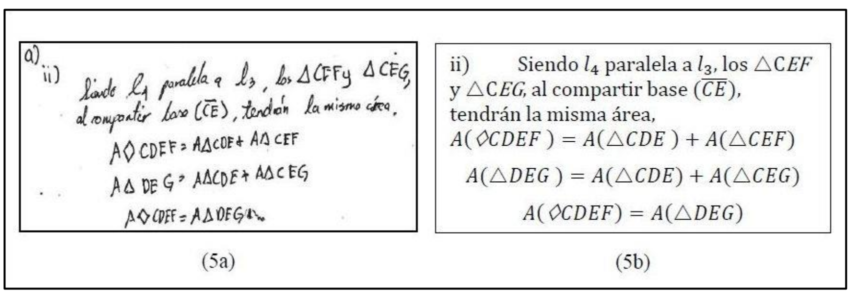
L6. Paco: Sí, este triangulito [*señala con su dedo △CDE; Figura 4b*] es común, y ya los otros [*se refiere a △CEF y △CEG*] tienen áreas iguales.

Figura 4. En (4a) Paco y Carlos identifican las paralelas l_3 y l_4 relacionadas con ◊CDEF y △DEG, y en (4b) identifican la región común a estos polígonos.


(4a) (4b)

A continuación, los estudiantes escriben su respuesta en el papel (Figura 5).

Figura 5. Prueba escrita para la sección (a) (ii) de la Actividad A1 de que las áreas de ◊CDEF y △DEG son iguales.


a) ii) Siendo l_4 paralela a l_3, los ΔCFF y ΔCEG, al compartir base $(\overline{CE})$, tendrán la misma área.
$A◊CDEF = A\Delta CDE + A\Delta CEF$
$A\Delta DEG = A\Delta CDE + A\Delta CEG$
$A◊CDEF = A\Delta DEG$

ii) Siendo l_4 paralela a l_3, los $\triangle CEF$ y $\triangle CEG$, al compartir base $(\overline{CE})$, tendrán la misma área,
$A(◊CDEF) = A(\triangle CDE) + A(\triangle CEF)$
$A(\triangle DEG) = A(\triangle CDE) + A(\triangle CEG)$
$A(◊CDEF) = A(\triangle DEG)$

(5a) (5b)

(a) (iii) Igualdad de las áreas de *△DEG* y de *▯EHML*

L7. Paco: Ahora para *△DEG* y *▯EHML* (Figura 6a), como nos dijeron que este es punto medio [*se refiere a H*] pues sí, ya está. [*Se refiere a que con eso ya es suficiente, que ya está probado.*]

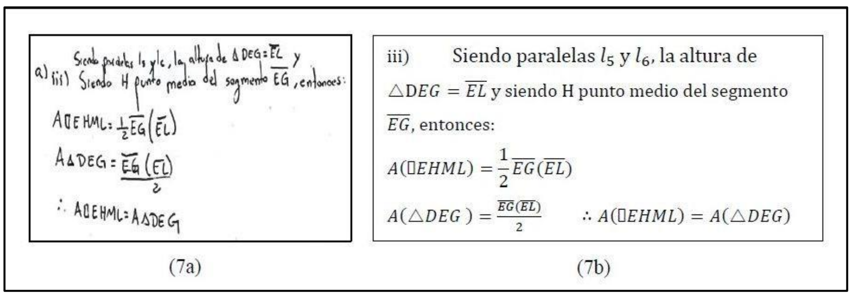
L8. Carlos: Ah, es lo mismo, sí; porque son paralelas ésta y ésta [*señala con su dedo* l_6 *y* l_5]. Sí, ya está.

A continuación, los estudiantes escriben su respuesta en el papel (Figura 7).

Figura 6. Paco explica a Carlos la igualdad de las áreas de $\triangle DEG$ y $\square EHML$.

Durante la resolución de la Actividad A1, los estudiantes del Equipo 1 hicieron uso del lenguaje coloquial, que en ocasiones fue impreciso; sin embargo, es de llamar la atención el uso del lenguaje simbólico formal en cada una de sus respuestas por escrito.

Figura 7. Prueba escrita de Paco y Carlos para la sección (a) (iii) de que las áreas de $\triangle DEG$ y $\square EHML$ son iguales.



De acuerdo con las líneas de diálogo (L1 a L8) entre los estudiantes se observa siempre un trabajo colaborativo. Paco y Carlos explicaron y justificaron por qué son iguales las áreas de los polígonos de interés. Ellos incorporaron conocimientos previos relacionados con conceptos básicos de geometría que desde un principio pusieron en acción, como se muestra en sus diálogos y en las figuras 2 a 7. En la resolución de la Actividad A1 los estudiantes hicieron uso de la argumentación deductiva formal.

Actividad A2. (ambiente tecnológico GeoGebra)

Abre el archivo de GeoGebra en el que se ha reproducido la figura precedente y arrastra cualquier vértice del ⬟*ABCDE*. Describe las características y limitaciones que tiene el arrastre de estos puntos.

Lleva a cabo lo que se solicita en los tres incisos siguientes:

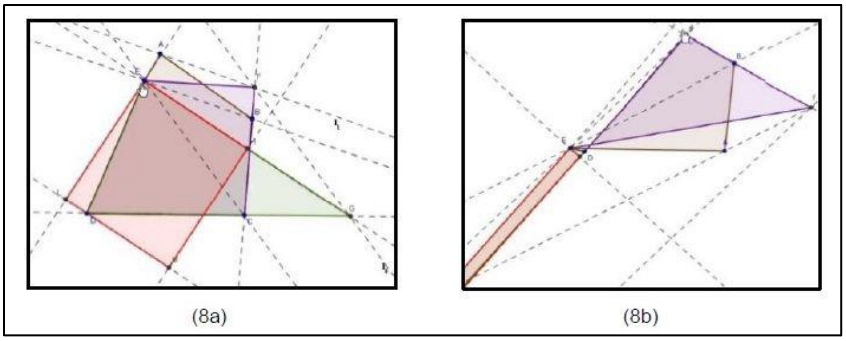
a) Explica de manera clara cómo a partir de cualquier polígono dado [no importando el número de sus lados], es posible hallar un cuadrado de igual área de ese polígono.
b) Argumenta por qué se conserva la igualdad de las áreas de los polígonos cada vez que se va eliminando uno de sus lados, y por qué varía su perímetro.

c) Enuncia las diferencias y similitudes entre trabajar con lápiz-y-papel y trabajar con GeoGebra.

Los estudiantes comenzaron a interaccionar con la construcción, ellos recurrieron a la equidistancia entre rectas paralelas para hablar de la igualdad de áreas entre los polígonos dados, tomando en cuenta que el arrastre de los puntos permite modificar tamaño y forma de la figura construida sin que ésta pierda sus propiedades (véase la Figura 8).

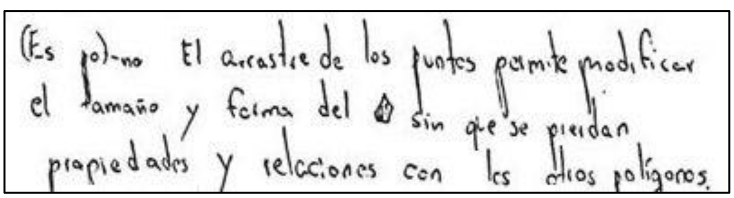
L9. Carlos: [*…*]. No cambian sus proporciones [*se refiere a la igualdad de áreas de los polígonos mientras mueven la construcción; Figura 8*].

Figura 8. Importancia de las líneas paralelas. Arrastre del punto E (8a) y del punto C (8b).



L10. Paco: No, porque todo se mueve sobre las líneas paralelas [*Figura 8*]… […] El arrastre [*de cualquier vértice de ⬟ABCDE*] permite modificar tamaño y forma sin que se pierdan sus propiedades… [*Entonces dan su respuesta por escrito. Véase Figura 9*].

Figura 9. Respuesta escrita de Paco y Carlos a la sección (a) de la Actividad A2.



Los estudiantes incorporaron conocimientos previos mediante el uso de conceptos y propiedades específicas en los procesos de resolución de la Actividad A en ambos ambientes de trabajo y entendieron la importancia de las rectas paralelas en el diseño y resolución de la Actividad A2.

Después de darse cuenta que bajo el arrastre la construcción referente a la Figura 1 conservaba sus propiedades, Paco y Carlos observaron por momentos que algunos polígonos se confundían con otros; incluso, que el rectángulo podían deformarlo en un cuadrado (véase la figura 8). También plantearon conjeturas; sin embargo, no exploraron con la herramienta tecnológica si éstas se cumplían o no.

a) Cómo hallar un cuadrado de igual área a la de un polígono dado.

L11 Carlos: Se puede siempre y cuando se mantenga su proporcionalidad [*se refiere a las áreas de los polígonos*].

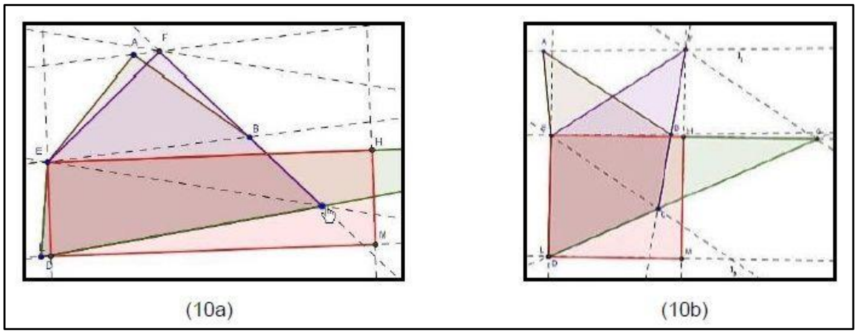
L12 Paco: Sí, de hecho, tiene razón, de cualquier polígono se puede dar un cuadrado, pero, ¿cómo explicas eso?

L13 Carlos: O sea, podríamos decir que se puede hallar por el proceso analítico de igualar las áreas y despejar las variables…

L14 Paco: Sí, pero… Ok, si para cualquier polígono es posible dar un cuadrado… [*de igual área que la del polígono dado*]. [*En ese momento aproxima el rectángulo dado a un cuadrado; Figura 10*]… Ah, ya. Mientras no atraviese ninguno de sus lados [*mientras no se corten entre sí los lados de un mismo polígono*]… se puede llegar a un cuadrado con la misma área.

L15 Carlos: Sí, mientras no se prolongue infinitamente [*cualquier vértice de un polígono dado*] y toque las paralelas [*cualquier vértice del polígono*] se conservan las áreas [*de todos los polígonos*].

Figura 10. Deformación del pentágono en un cuadrilátero (10 a) y del rectángulo en un cuadrado (10 b).

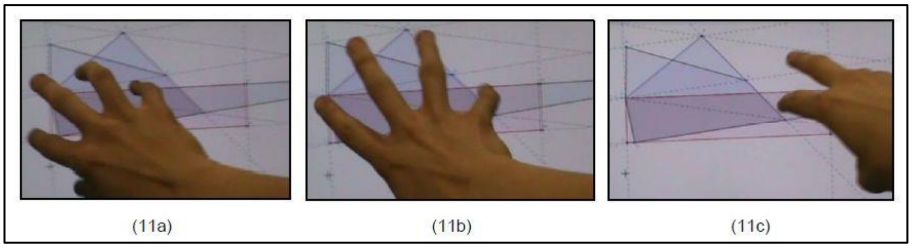


b) Igualdad de áreas de los polígonos, variación de su perímetro "eliminando lados"

L16 Carlos: ¿Cómo que eliminando lados? ¿O sea, un cuadrilátero convertirlo en un triángulo? ¿Sí es eso? [*Paco dice: Sí, yo supongo*]

L17 Carlos: […]. Ah sí, era [*convertir el polígono*] el de cinco [*lados*] en cuatro [*lados*], el de cuatro [*lados*] en tres y [*Mientras Carlos expone sus argumentos va señalando la figura correspondiente; Figura 11*]… Ah, pero, es como lo que hicimos antes [*con lápiz-y-papel*]. O sea, se refiere a que tiene diferente número de lados cada uno [*de los polígonos así construidos*] pero es la misma área… [*Y Paco dice: Sí, la misma área*]

Figura 11. Hugo se refiere al pentágono (11a), al cuadrilátero (11b) y al triángulo (11c) dados.



Los movimientos de la mano de Carlos (Figura 11) representan las transformaciones del pentágono en el cuadrilátero y de éste en el triángulo, mientras que un número determinado de sus dedos se asocia con el correspondiente polígono antes y después de la transformación. Esto les ayudó a los estudiantes a comprender de mejor manera la pregunta del inciso (b) de la Actividad A2.

En seguida, Paco y Carlos justificaron que el perímetro de cada polígono varía y está en función del número de sus lados mientras la igualdad de áreas permanece constante (véanse las siguientes líneas de diálogo y las figuras 12 y 13).

L18. Paco: Sí, y es que éstas [*las áreas*] se conservan cuando se cumplen ciertas propiedades… [*En seguida, arrastran los vértices A y F de tal manera que casi coincide uno con el otro; Figura 12c*].

L19. Carlos: Mmm, porque no importa los lados que tenga [*el polígono dado*], las propiedades de dichas figuras [*polígonos*], corresponderán a la proporcionalidad entre ellas a pesar de sus lados. Y su perímetro varía porque finalmente sí está en función del número de lados. [*Véase Figura 12*].

L20. Paco: Sí, exacto. Y sólo cambia el perímetro, pero el área no cambia. [*En seguida escriben su respuesta en el papel; Figura 13*]

Figura 12. El pentágono y el cuadrilátero (12a) se deforman (12b) hasta confundirse con un triángulo (12c).

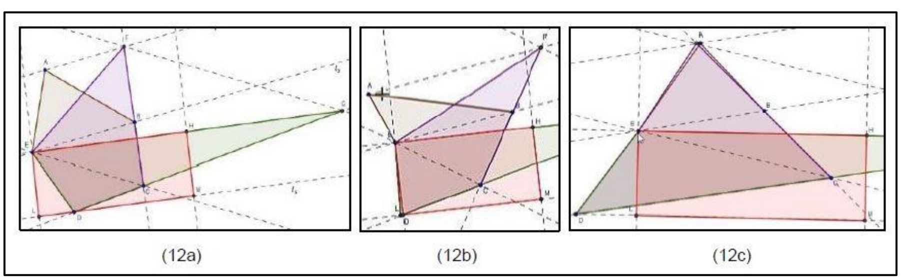
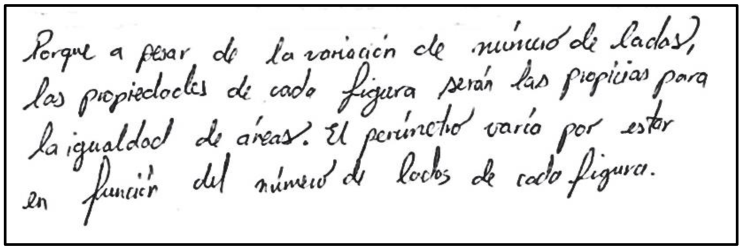


Figura 13. Respuesta escrita de Paco y Carlos a la sección (b) de la Actividad A2.

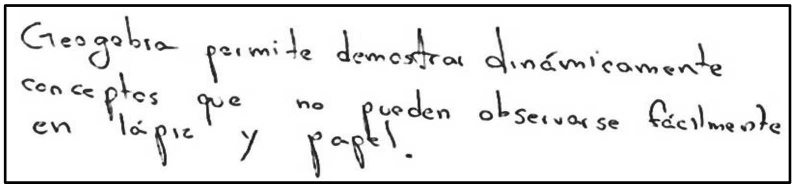

Porque a pesar de la variación de número de lados, las propiedades de cada figura serán las propicias para la igualdad de áreas. El perímetro varía por estar en función del número de lados de cada figura.

De acuerdo con las líneas precedentes (L9 a L20), al resolver los estudiantes de manera colaborativa la Actividad A2 con ayuda de la herramienta tecnológica, se observa que llegaron a entender que el perímetro de cada polígono varía en función del número de sus lados [y de su forma] a pesar de que la igualdad de sus áreas es constante. Por medio del arrastre exploraron y observaron lo que varía y lo que permanece constante en la construcción dinámica dada, así como algunas propiedades de la misma; incluso, formularon conjeturas. Paco y Carlos incorporaron también los conocimientos adquiridos en la actividad A1 para darle sentido a la igualdad de áreas de todos los polígonos involucrados y para entender cómo hallar un cuadrado de igual área que del polígono dado (Figura 9).

c) Diferencias y similitudes entre trabajar con lápiz-y-papel y trabajar con GeoGebra

Los estudiantes comentaron que con ayuda de GeoGebra pudieron complementar y entender mejor lo hecho con lápiz-y-papel (Figura 14).

Figura 14. Respuesta escrita de Paco y Carlos a la sección (c) de la Actividad A2.


Geogebra permite demostrar dinámicamente conceptos que no pueden observarse fácilmente en lápiz y papel.

La resolución de la Actividad A2 en el ambiente dinámico complementó lo hecho con lápiz-y-papel utilizando la herramienta tecnológica GeoGebra como un mediador del conocimiento.

Conclusiones

De acuerdo con lo expuesto en las líneas precedentes, se observa que tanto con el uso de lápiz-y-papel, como con el uso de GeoGebra, los estudiantes trabajaron de manera colaborativa para lograr un aprendizaje significativo. En el ambiente de lápiz-y-papel, los estudiantes hicieron uso del lenguaje coloquial y simbólico para dar respuesta a las preguntas formuladas; mientras que en el ambiente tecnológico (GeoGebra) lograron llevar a cabo un proceso de reflexión observando propiedades de la construcción por medio del arrastre, lo que les permitió aclarar algunas dudas surgidas en el trabajo con lápiz-y-papel y responder, en gran medida, de manera adecuada y justificada. Así, los estudiantes actuaron y reflexionaron a través del artefacto al resolver problemas de tipo geométrico relacionados con polígonos de igual área.

A partir de esta experiencia con los alumnos se observó que GeoGebra constituyó el artefacto con el cual ellos lograron llevar a cabo procesos de reflexión aún más profundos que cuando usaron solamente lápiz-y-papel. El uso y aprovechamiento de la tecnología enriqueció considerablemente el proceso de aprendizaje respecto de los conceptos abordados.

Los resultados obtenidos del acopio de los datos muestran que el diseño e implementación de las actividades, primero con el uso de lápiz y papel y después con el uso de la herramienta tecnológica GeoGebra, promueven en los estudiantes procesos de reflexión y aprendizaje significativo en torno a conceptos en geometría como los aquí mencionados.

Referencias bibliográficas

González, G. & Herbst, P. (2009). Students' conceptions of congruency through the use of dynamic geometry software. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14, 153–182.

Radford, L. (2012). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, (Eds.), From text to 'lived' resources (pp. 283-288). New York: Springer.